Applications des fonctions de Green aux équations différentielles ordinaires

§1. Rappels

On note I ($\subset \mathbb{R}$) une intervalle dans $\mathbb{R}$, et $C^m(I)$ l'ensemble des fonctions sur I telles que les dérivées

$$\frac{d^{(j)} f}{dx^j} = D^j f = f^{(j)}, \qquad j = 1, \dots, m.$$

existent et sont continues.

Déf. 1 Soient $a_j(x)$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ $n+1$ fonctions définies et bornées sur I. L'application $L : C^m(I) \to C^0(I)$ $f \mapsto Lf$,

$$(Lf)(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) (D^j f)(x)$$

est appelée un opérateur différentiel (ODL) d'ordre n.

linéaire

Soit L un ODL d'ordre n sur I et soit f une fonction n fois dérivable sur I. L'équation

$$Lg = f$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre n sur I. Si $f = 0$, l'équation est appelée homogène. Les solutions d'une équation homogène forment un espace vectoriel qui s'appelle le noyau de L, noté $\ker L$. ($\dim = n$)

Prop. 2. solution générale de l'équation non-homogène = solution générale de l'équation homogène + une solution particulière de l'équation non-homogène

Conditions limites :

- en même point $\Longrightarrow$ problème de Cauchy
- en différents points.

§ 2. Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy concerne la résolution de l'équation différentielle

$$(L g)(x) = f(x)$$

munie des conditions initiales

$$\begin{pmatrix} g \\ g' \\ \vdots \\ g^{(n-1)} \end{pmatrix}(x=0) = \vec{g}_0$$

Ce problème se décompose en 2 parties : la solution de l'équation homogène avec conditions initiales non-homogènes (partie I) et la solution de l'équation non-homogène avec conditions initiales (CI) homogènes (partie II) :

partie I	partie II
$(L g_I)(x) = 0$	$(L g_{II})(x) = f$
$\begin{pmatrix} g_I \\ g_I' \\ \vdots \\ g_I^{(n-1)} \end{pmatrix}(x=0) = \vec{g}_0$	$\begin{pmatrix} g_{II} \\ g_{II}' \\ \vdots \\ g_{II}^{(n-1)} \end{pmatrix}(x=0) = \vec{0}$

On peut facilement vérifier que $g = g_I + g_{II}$.

Les 2 problèmes sont en général difficiles (voir impossibles) à résoudre. Par contre, pour les équations différentielles ordinaires (EDOs) à <u>coefficients constants</u>, nous avons une technique qui permet de traiter la Partie I :

i). on écrit l'équation caractéristique et, à l'aide de ses solutions, on construit la solution générale de l'équation $(L g_I)(x) = 0$

ii). en imposant les conditions initiales, on obtient un système d'équations linéaires pour les n constantes d'intégration, qui fixe complètement la solution.

On s'intéresse à la Partie II : construction de la solution particulière de l'équation non-homogène, vérifiant les conditions initiales homogènes. Donc on considère l'équation

(1) $$(Lg)(x) = f(x)$$

munie des CI

(2) $$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0.$$

Déf. 3 La solution de l'équation (1) avec $f(x) = \delta(x-y)$, vérifiant les CI (2) est notée $G(x,y)$ et est appelée la $\underbrace{\text{fonction de Green}}_{FG}$ de L. Plus explicitement :

(3) $$L_x G = \delta(x-y)$$

↑ indice signifie que les dérivées dans L sont par rapport à x

(4) $$\Big[G(x,y)\Big]_{x=0} = \Big[\frac{d}{dx}G(x,y)\Big]_{x=0} = \dots \Big[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}G(x,y)\Big]_{x=0} = 0.$$

Théorème 4. La solution de (1)-(2) est donnée par

(5) $$g(x) = \int_0^\infty G(x,y)\, f(y)\, dy$$

▼ Pour $g(x)$ définie par (5) nous avons

$$(Lg)(x) = L_x \int_0^\infty G(x,y) f(y)\,dy = \int_0^\infty L_x G(x,y) f(y)\,dy =$$

$$= \Big|\text{d'après } (3)\Big| = \int_0^\infty \delta(x-y) f(y)\,dy =$$

$$= f(x),$$

donc (1) est vérifiée. Les CI (2) sont automatiquement satisfaites grâce à (4). ▼

Il suffit donc trouver $G(x,y)$ et (5) va donner la solution de la Partie II du problème de Cauchy pour tout f.

Mais comment calculer la FG ?

Nous allons résoudre ce problème pour les ODL d'ordre $n=2$ (c'est-à-dire, les équation de 2^{nd} ordre).

On peut supposer que $\xleftarrow{}$ fonctions lisses sur I.

(6) $$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)$$

et l'équation pour la FG devient

(7) $$\left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] G(x,y) = \delta(x-y)$$

Afin d'obtenir une formule explicite pour la FG, on fera quelques hypothèses :

- supposons que pour $x \neq y$, la FG $G(x,y)$ est une fonction lisse de x.
- on suppose en plus que $G(x,y)$ et $\frac{d}{dx}G(x,y)$ sont bornées quand $x \to y$.

Intégrons (7) par rapport à x entre $x = y-\varepsilon$ et $x = y+\varepsilon$:

(8) $$\left[\frac{d}{dx}G(x,y)\right]_{x=y-\varepsilon}^{x=y+\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} p(x)\frac{d}{dx}G(x,y)\,dx + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} q(x)\,G(x,y)\,dx = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x-y)\,dx$$

Notons que :

- les propriétés de δ impliquent
$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x-y)\,dx = 1$$
- car $G(x,y)$ et $\frac{d}{dx}G(x,y)$ sont supposées d'être bornées quand $x \to y$, on a
$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} p(x)\frac{dG(x,y)}{dx}\,dx \to 0,$$
$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} q(x)\,G(x,y)\,dx \to 0,$$
lorsque $\varepsilon \to 0$.

Donc, en passant dans (8) à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient $\left.\frac{d}{dx}G(x,y)\right|_{x=y-0}^{x=y+0} = 1$. Cela signifie que la dérivée $\frac{d}{dx}G(x,y)$ n'est pas continue en $x=y$, mais a un saut de 1.

Maintenant on peut préciser la Déf. 3 de la FG :

Déf. 5 La FG pour le problème de Cauchy associé à l'opérateur (6) est la fonction $G(x,y)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \neq y$ la FG $G(x,y)$ est une fonction lisse de x et $L_x G(x,y) = 0$.

2. $$\left[G(x,y)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx} G(x,y)\right]_{x=0} = 0 .$$

3). $G \in C^0$ en $x = 0$ (c'est-à-dire, $G(y+0,y) = G(y-0,y)$) mais
$$\left[\frac{d}{dx} G(x,y)\right]_{x=y-0}^{x=y+0} = 1 .$$

Prop. 6 $G(x,y)$ existe et est unique.

▼ Nous allons démontrer l'existence par construction explicite. Considérons

$$G(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < y, \\ C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) & \text{pour } x \geq y. \end{cases}$$

Il est clair que cette fonction vérifie $L_x G(x,y) = 0$ pour $x \neq y$.

2 solutions indépendantes

La condition 2). de la Déf. 5 est satisfaite automatiquement. Nous allons essayer de choisir $C_1(y)$ et $C_2(y)$ de telle manière que la condition 3) soit vérifiée également.

La continuité de $G(x,y)$ en $x = y$ implique

(9) $$C_1(y)\, g_1(y) + C_2(y)\, g_2(y) = 0$$

De façon analogue, le saut de $\frac{d}{dx} G(x,y)$ en $x = y$ donne :

(10) $$C_1(y)\, g_1'(y) + C_2(y)\, g_2'(y) = 1 .$$

On considère (9)-(10) comme un système de 2 équations linéaires pour 2 inconnues $C_1(y)$ et $C_2(y)$.

Sa solution est (calcul direct)

$$C_1(y) = -\frac{g_2(y)}{W(g_1(y), g_2(y))},$$

$$C_2(y) = \frac{g_1(y)}{W(g_1(y), g_2(y))},$$

où $W(g_1, g_2)$ note le Wronskien

$$W(g_1, g_2) = g_1 g_2' - g_1' g_2 .$$

Donc pour $x \geq y$ nous avons:

$$G(x,y) = \frac{g_1(y) g_2(x) - g_1(x) g_2(y)}{W(g_1(y), g_2(y))}$$

▼

<u>Corollaire 7</u>. Comme dans notre $G(x,y) = 0$ pour $x < y$, alors la formule (5) pour la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] g(x) = f(x), \\ g(0) = g'(0) = 0 \end{cases}$$

devient

$$g(x) = \int_0^x G(x,y) f(y)\, dy = \int_0^x \frac{g_2(x) g_1(y) - g_1(x) g_2(y)}{W(g_1(y), g_2(y))} f(y)\, dy$$

<u>Exemple 8</u>. Considérons le problème suivant de Cauchy:

(11)

$$g''(x) + \omega^2 g(x) = e^{-x}, \qquad g(0) = g'(0) = 0.$$

Nous allons trouver $g(x)$ en utilisant la méthode de la FG.

▼ 1). Choisissons comme 2 solutions de l'équation homogène $(g'' + \omega^2 g = 0)$:

$$g_1(x) = \sin \omega x$$
$$g_2(x) = \cos \omega x$$

2. Calculons leur Wronskien:

$$W(g_1(x), g_2(x)) = \sin\omega x(-\omega \sin\omega x) - \cos\omega x(\omega\cos\omega x) =$$
$$= -\omega(\sin^2\omega x + \cos^2\omega x) = -\omega.$$

3). Pour $x > y$, la FG est donc donnée par

$$G(x,y) = \frac{g_2(x) g_1(y) - g_1(x) g_2(y)}{W(g_1(y), g_2(y))} =$$

$$= \frac{\cos\omega x \sin\omega y - \sin\omega x \cos\omega y}{-\omega} = \frac{\sin\omega(x-y)}{\omega}$$

Rappelons que pour $x < y$ $G(x,y) = 0$.

4). Maintenant on peut calculer $g(x)$:

$$g(x) = \int_0^x G(x,y)\, f(y)\, dy = \int_0^x \frac{\sin\omega(x-y)}{\omega} e^{-y} dy =$$

$$= \frac{e^{i\omega x}}{2i\omega} \int_0^x e^{-(1+i\omega)y} dy - \frac{e^{-i\omega x}}{2i\omega} \int_0^x e^{-(1-i\omega)y} dy =$$

$$= \frac{e^{i\omega x}}{2i\omega} \frac{e^{-(1+i\omega)y}}{-(1+i\omega)} \Bigg|_0^x - \frac{e^{-i\omega x}}{2i\omega} \frac{e^{-(1-i\omega)y}}{-(1-i\omega)} \Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{e^{i\omega x}(1 - e^{-x-i\omega x})}{2i\omega(1+i\omega)} + e^{-i\omega x} \frac{(e^{-x+i\omega x} - 1)}{2i\omega(1-i\omega)} =$$

$$= \frac{e^{i\omega x}}{2i\omega(1+i\omega)} - \frac{e^{-i\omega x}}{2i\omega(1-i\omega)} + \frac{e^{-x}}{2i\omega} \underbrace{\left(\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega}\right)}_{= \frac{2i\omega}{1+\omega^2}} =$$

$$= \frac{\cos\omega x}{2i\omega}\left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{1-i\omega}\right)$$

$$+ \frac{i\sin\omega x}{2i\omega}\left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega}\right) + \frac{e^{-x}}{1+\omega^2} =$$

(12) $$= \frac{e^{-x}}{1+\omega^2} - \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2} + \frac{\sin\omega x}{\omega(1+\omega^2)}.$$

Pour être sur de ne pas avoir fait d'erreur dans le calcul, on pourra vérifier directement que le résultat (12) vérifie l'équation et les CI (11).

§3. Problème à conditions limites en 2 points

Ici on s'intéresse à la résolution de la même équation

(13) $$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) g(x) = f(x),$$

munie

- d'une condition limite en $x = a$
- d'une condition limite en $x = b$

Ce problème peut avoir 0, 1 ou ∞ solutions.

<u>Exemple 9.</u> Considérons l'équation différentielle

$$g''(x) + g(x) = 0$$

sur l'intervalle $[a, b] = [0, \pi]$. La solution générale de cette équation est

$$g(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

$$g'(x) = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

1). si on pose $g(0) = 1$, $g'(\pi) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 1$, donc $g(x) = \cos x$ (1 solution)

2). pour conditions $g(0) = g(\pi) = 0$ on obtient $C_2 = 0$, C_1 quelconque $\Rightarrow g(x) = C_1 \sin x$ (∞ solutions)

3). pour $g(0) = 0$, $g'(\pi) = 0$ on a $C_1 = C_2 = 0$ (0 solutions nontriviales).

<u>Déf. 10</u> Les points limites a, b sont appelés conjugués si l'équation homogène

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) g(x) = 0$$

munie des mêmes conditions limites (que l'équation non-homogène de départ) n'a pas de solutions nontriviales.

<u>Déf. 11.</u> Une condition limite est dite homogène si, une fois satisfaite par une fonction $g(x)$, elle est aussi satisfaite par $\lambda g(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. (Exemple: la forme habituelle en $x = a$ est $\alpha g(a) + \beta g'(a) = 0$).

<u>Déf. 12.</u> Considérons l'équation (13) avec <u>conditions limites homogènes</u> en 2 points. La FG $G(x, y)$, considérée comme fonction de x, vérifie

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right\} G(x, y) = \delta(x - y)$$

et les mêmes conditions limites homogènes.

Dans la pratique, la FG est définie par les conditions suivantes:

1). $G(x,y)$ est lisse pour $a \leq x, y \leq b$, sauf en $x=y$.

2). en tant que fonction de x, pour tout $x \neq y$ $G(x,y)$ vérifie l'équation homogène

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right\} G(x,y) = 0$$

et les conditions limites homogènes appropriées.

3). $G(x,y)$ est continue en $x=y$, mais $\frac{d}{dx}G(x,y)$ a un saut :

$$G(y+0,y) = G(y-0,y), \quad \left[\frac{d}{dx}G(x,y)\right]_{x=y-0}^{x=y+0} = 1,$$

pour tout $y \in (a,b)$.

<u>Prop. 13</u> Si les points a et b sont conjugués, alors la fonction de Green existe et est unique. En plus, la solution de (13) avec conditions limites homogènes est donnée par

$$g(x) = \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy.$$

<u>Exemple 14</u> Nous allons illustrer la méthode sur le problème suivant :

$$g''(x) - k^2 g(x) = f(x), \quad g(0) = g(l) = 0.$$

▽ On commence par regarder l'équation homogène

$$g''(x) - k^2 g(x) = 0.$$

Si on impose les CI, on obtien un système de 2 équations pour C_1, C_2 :

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 e^{kl} + C_2 e^{-kl} = 0$$

On sait que ce système n'a pas de solutions non-triviales si $\operatorname{sh} kl \neq 0$. Dans ce cas ($\operatorname{sh} kl \neq 0$), les points $x=0$ et $x=l$ sont conjugués, et donc on peut appliquer la méthode de la FG. Le calcul se décompose en quelques étapes :

1). On sait que pour $x<y$ et pour $x>y$ la FG vérifie l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,y) - k^2 G(x,y) = 0$$

Donc on doit avoir

$$(14) \qquad G(x,y) = \begin{cases} C_1(y)\, e^{kx} + C_2(y)\, e^{-kx}, & \text{pour } 0 \le x < y \\ D_1(y)\, e^{k(x-\ell)} + D_2(y)\, e^{-k(x-\ell)}, & \text{pour } y < x \le \ell. \end{cases}$$

(Nous avons défini les constantes d'intégration $D_1(y)$ et $D_2(y)$ de la manière que les facteurs $e^{\pm k\ell}$ apparaissent explicitement. Nous allons voir que ceci simplifie beaucoup la suite).

2). La FG doit vérifier les conditions limites du problème de départ:

$$G(0,y) = G(\ell, y) = 0,$$

d'où on obtient 2 équations pour $C_{1,2}(y)$ et $D_{1,2}(y)$:

$$\begin{cases} C_1(y) + C_2(y) = 0 \\ D_1(y) + D_2(y) = 0 \end{cases}$$

Donc on peut réécrire (14) comme ceci:

$$G(x,y) = \begin{cases} C(y)\, \mathrm{sh}\, kx & \text{pour } 0 \le x < y, \\ D(y)\, \mathrm{sh}\, k(x-\ell) & \text{pour } y < x \le \ell. \end{cases}$$

Ici, $C(y) = 2C_1(y)$ et $D(y) = 2D_1(y)$.

3). Il nous reste 2 constantes (dépendant de y) à déterminer. On va le faire en utilisant la condition de continuité de la FG et le saut de sa dérivée en $x = y$:

$$G(y+0, y) = G(y-0, y) \Longrightarrow C(y)\,\mathrm{sh}\,ky = D(y)\,\mathrm{sh}\,k(y-\ell)$$

$$\left[\frac{d}{dx} G(x,y)\right]_{x=y-0}^{x=y+0} = 1 \Rightarrow D(y)\, k\, \mathrm{ch}\, k(y-\ell) - C(y)\, k\, \mathrm{ch}\, ky = 1$$

Ceci donne 2 équations (exactement ce qu'il faut pour trouver $C(y)$ et $D(y)$). Leur solution est:

$$C(y) = \frac{\mathrm{sh}\, k(y-\ell)}{k\, \mathrm{sh}\, k\ell}, \quad D(y) = \frac{\mathrm{sh}\, ky}{k\, \mathrm{sh}\, k\ell}.$$

Donc la FG s'écrit explicitement comme :

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} kx \ \operatorname{sh} k(y-\ell)}{k \operatorname{sh} k\ell} & \text{pour} \quad 0 \leq x < y, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh} k(x-\ell) \operatorname{sh} ky}{k \operatorname{sh} k\ell} & \text{pour} \quad y < x \leq \ell. \end{cases}$$

4). Finalement, la solution est :

$$g(x) = \int_0^\ell G(x,y) f(y)\, dy = \int_0^x G(x,y) f(y)\, dy + \int_x^\ell G(x,y) f(y)\, dy$$

$$= \frac{\operatorname{sh} k(x-\ell)}{k \operatorname{sh} k\ell} \int_0^x \operatorname{sh} ky \, f(y)\, dy +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} kx}{k \operatorname{sh} k\ell} \int_x^\ell \operatorname{sh} k(y-\ell) f(y)\, dy.$$